MA2 – „písemná" přednáška (za 16.3.2020)

Soustavy obyčejných diferenciálních rovnic 1. řádu – dokončení

Co jsme už „udělali" v předchozí přednášce (písemná k 11.3):

1. Formulace počáteční (Cauchyho) úlohy pro soustavu obyčejných lineárních rovnic 1. řádu (pouze maticového práce – zápis)

Máme najít funkci $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \in C_n^{(1)}(a,b)$ tak,

aby
(1) $x'(t) = A(t)x(t) + f(t)$, $t \in (a,b)$

(2) $x(t_0) = p$, $t_0 \in (a,b)$, $p \in R^n$

(Značení: $A(t) = (a_{ij}(t))_{i,j=1,..n}$,

$f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$, $p = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$, $x'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix}$, $t \in (a,b)$)

Byla uvedena existenční věta:

Věta: Je-li $f(t) \in C_n(a,b)$, $a_{ij}(t) \in C(a,b)$, $i,j = 1,..,n$, pak úloha (1), (2) má právě jedno řešení $x(t) \in C_n^{(1)}(a,b)$.

A dále:

Rovnici (1) lze „přepsat": $x'(t) - A(t)x(t) = f(t)$, $t \in (a,b)$, kde zobrazení $x(t) \in C_n^{(1)}(a,b) \longrightarrow x'(t) - A(t)x(t) \in C(a,b)$ je lineární – tedy zde „fungují" rada lineární algebry:

„Rady "lineární algebry":

1) najděte řešení homogenní rovnice, tj. soustavy

$$(3) \qquad x'(t) - A(t)x(t) = 0 \, ;$$

množina řešení soustavy homogenní (3) je vektorový prostor V_H, podprostor prostoru $C_n^{(1)}(a,b)$ – „stačí" najít bázi V_H

2) najděte partikulární řešení $x_p(t) \in C^{(1)}(a,b)$ soustavy

$$x'(t) - A(t)x(t) = f(t),$$

3) pak všechna řešení jsou ve tvaru

$$x(t) = x_0(t) + x_p(t) \, , \quad t \in \mathcal{J} \, ,$$

kde $x_0(t) \in V_H$.

A odsud otázky (podobně jako u diferenciálních rovnic lineárních 2. řádu) pro dnešní přednášku:

1) a) V_H, dim V_H, báze V_H (zde u OLDR 2. řádu byla užitečná existenční věta)

b) „nalezení" báze V_H

2.) výpočet $x_p(t)$ – asi bude opět „fungovat" metoda variace konstant (a odhad $x_p(t)$ u „jednodušších" soustav)

3) budou zde nějaké problémy, podobné těm u OLDR 2. řádu? (tam – vícenásobný kořen charakteristické rovnice, nebo komplexní kořeny)

A nyní si ukážeme, jak lze „splnit" jednotlivé kroky obecného návodu pro řešení našeho problému, tj. řešení soustav obyčejných lineárních dif. rovnic (OLDR) 1. řádu aspoň v jednoduchém případě (jako u OLDR 2. řádu) - budeme řešit ten nejjednodušší problém, kdy koeficienty soustavy budou konstanty, tj. „bude"

$$A(t) = A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \text{ - matice konstant,}$$

toto bude v „bodě" 1b)

<u>Ale zpět ještě k 1a)</u> (? $\dim V_H$)

<u>Věta</u>: Je-li $A(t)$ čtvercová matice řádu n, $a_{ij}(t) \in C(a,b)$ $(i,j=1,\dots n)$, pak prostor V_H řešení homogenní soustavy

$$(3) \dots\quad \underline{x'(t) - A(t)x(t) = 0 \quad , t \in (a,b)}$$

má dimensi $\underline{n}$ (tj. $\dim V_H = n$)

Větu lze dokázat stejně jako u OLDR 2. řádu užitím existenční věty pro úlohu počáteční (1),(2). - viz minulá „přednáška"

<u>„Naznačení" důkazu (pro zajímavce):</u>

zvolme $t_0 \in (a,b)$, $p^{(i)} = (0,\dots 0,\overset{i}{1},0\dots 0)$ $(= \vec{e}_i)$; pak existuje jediné řešení $v^{(i)}(t)$ rovnice (3) takové, že $v^{(i)}(t_0) = p^{(i)}$; pak $v^{(1)}(t),\dots,v^{(n)}(t)$ jsou lineárně nezávislá řešení a každé řešení rovnice homogenní (3) je jejich lineární kombinací (podobně, jako u OLDR 2. řádu).

Tedy, je-li $x(t)$ řešení (3), pak ex. $c_1, \dots c_n \in R$, tak, že

$$x(t) = c_1 v^{(1)}(t) + c_2 v^{(2)}(t) + \dots + c_n \cdot v^{(n)}(t), \quad t \in (a,b),$$

tj:
$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} v_{11}(t) \\ v_{21}(t) \\ \vdots \\ v_{n1}(t) \end{pmatrix} + \dots + c_n \begin{pmatrix} v_{1n}(t) \\ v_{2n}(t) \\ \vdots \\ v_{nn}(t) \end{pmatrix},$$

(pak lze také psát)
$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} v_{11}(t), \dots, v_{1n}(t) \\ v_{21}(t), \dots, v_{2n}(t) \\ \dots \quad \dots \\ v_{n1}(t), \dots, v_{nn}(t) \end{pmatrix}}_{V(t)} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Tedy, <u>všechna řešení</u> mají „tvar“ <u>$x(t) = V(t) \cdot c$</u>, $c \in R^n$

<u>$V(t)$ – fundamentální matice</u> příslušná rovnici (3);

a platí, že <u>$V(t)$ je regulární matice pro všechna $t \in (a,b)$</u>

<u>Řešení počáteční úlohy</u>: $x(t_0) = p \dots (4)$ $(t_0 \in (a,b))$:

máme najít $c \in R^n$ tak, aby <u>$V(t_0) \cdot c = p \Rightarrow c = V^{-1}(t_0) \cdot p$</u>,

tedy, řešení počáteční úlohy v případě homogenní soustavy (3) je

<u>$x_{poč}(t) = V(t) \cdot V^{-1}(t_0) p, \quad t \in (a,b)$</u>

Matice $V(t) \cdot V^{-1}(t_0) = U(t, t_0)$ – <u>standardní matice</u> pro počáteční úlohu (3),(4),

(je $U(t_0, t_0) = I$)

A pak (v obvyklém značení) – řešení počáteční úlohy (3),(4)

je $\quad \underline{x_{poč}(t) = U(t,t_0)\,p \quad , \quad t\in(a,b)}$

A nyní už zbývá jen problém, jak najít fundamentální matici pro danou soustavu OLDR 1. řádu.

Minule jsme se snažili „nahodem" hledat řešení, byla-li matice soustavy konstantní, ve tvaru $x(t)=v e^{\lambda t}$, $\lambda\in ?$, $v\in R^n$,

tj. hledáme $\lambda\in \mathbb{C}\,(?)$, $v\in R^n$ tak, aby

$$x'(t) = A\cdot x(t),$$

a dostaneme: $\underline{\lambda v e^{\lambda t} = A\cdot v e^{\lambda t}}$

$$\left(\text{neboť } x'(t)=(x_1'(t),\dots,x_n'(t)) = (\lambda v_1 e^{\lambda t}, \lambda v_2 e^{\lambda t},\dots, \lambda v_n e^{\lambda t}) = \lambda v e^{\lambda t} \;\left(= \lambda\,(v_1,\dots,v_n)\, e^{\lambda t}\right)\right)$$

tj. hledáme: $\underline{\lambda}$ – vlastní číslo matice A a

$\underline{v}$ – vlastní vektor, příslušný vl. číslu λ

A říkali jsme si (v „kapitole" o vlastních číslech a vlastních „vektorech"), že

jsou-li vl. čísla (čtvercové) matice řádu n navzájem různá (a měli jsme jen „reálná" vlastní čísla), pak vlastní vektory, příslušné těmto vlastním číslům, jsou LNZ a tvoří bázi R^n,

v příkladech v minulé „přednášce" to takto „vyšlo",

obecně lze dokázat:

Pokud matice A soustavy $x'(t) = Ax(t)$ má navzájem různá reálná vlastní čísla $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, $\lambda_i \in R$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ pro $i \neq j$, pak, označme-li $v^{(i)}$ vlastní vektor, příslušný vl. číslu λ_i, pak vektory $v^{(1)}, \dots, v^{(n)}$ jsou LNZ a obecné řešení homogenní soustavy (3), je

$$\underline{x_H(t) = V(t) \cdot c, \quad t \in R, \ c \in R^n}$$

kde
$$V(t) = \begin{pmatrix} v_{11}e^{\lambda_1 t}, & v_{12}e^{\lambda_2 t}, & \dots, & v_{1n}e^{\lambda_n t} \\ v_{21}e^{\lambda_1 t}, & v_{22}e^{\lambda_2 t}, & \dots, & v_{2n}e^{\lambda_n t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{n1}e^{\lambda_1 t}, & v_{n2}e^{\lambda_2 t} & \dots & ; v_{nn}e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}, \ t \in R,$$

$$\left(\text{kde} \ \begin{pmatrix} v_{1i} \\ v_{2i} \\ \vdots \\ v_{ni} \end{pmatrix} = v^{(i)} \right), \quad i = 1, 2 \dots n$$

<u>a řešení počáteční úlohy</u> $x'(t) = Ax(t)$, $x(t_0) = p$ $(t_0 \in R)$

je $\underline{x_{poč}(t) = V(t)V^{-1}(t_0)p}$, $t \in R$

<u>Naznačení důkazu pro $n=2$ (opět pro zájemce – nepovinné!)</u>

$\lambda_1 \neq \lambda_2$ vlastní čísla matice A, $\lambda_1, \lambda_2 \in R$; $v^{(1)}, v^{(2)}$ vl. vektory, a řešení soustavy pak jsou $v^{(1)}(t) = v^{(1)}e^{\lambda_1 t}$, $v^{(2)}(t) = v^{(2)}e^{\lambda_2 t}$;

Pokud by $v^{(1)}, v^{(2)}$ byly LZ vektory, existovala by konstanta $(0 \neq) c \in R$ tak, že $v^{(1)} = c\, v^{(2)}$, pak ale $Av^{(1)} = cAv^{(2)}$, tj.

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_1 v^{(1)} = c\lambda_2 v^{(2)} \\ \text{ale } v^{(1)} = c v^{(2)} \end{array} \right\} \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2) \cdot c \cdot v^{(2)} = 0, \text{ ale}$$

$v^{(2)} \neq 0$, $c \neq 0$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ – <u>spor!</u>

(pro n-libovolné – důkaz indukcí)

Příklad $(n=2)$:

Je dána soustava a počáteční podmínky:

$$x_1' = x_1 - 3x_2 \quad , \quad x_1(0) = -1$$
$$x_2' = 4x_1 - 6x_2 \quad , \quad x_2(0) = 2$$

Maticově:
$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

1) Vlastní čísla matice $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$:

? λ tak, aby $\det(A - \lambda I) = 0$, tj. $\begin{vmatrix} 1-\lambda, & -3 \\ 4, & -6-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$$\Longleftrightarrow \quad (6+\lambda)(\lambda - 1) + 12 = 0, \text{ tj.}$$
$$\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0 \quad , \text{ tj.}$$
$$(\lambda + 2)(\lambda + 3) = 0$$

Vlastní čísla jsou $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -3$.

2) vlastní vektory (dopočtěte sami): $v^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$,

a tedy f.s.: $v^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t}$, $v^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} e^{-3t}$ a

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}_H = \underbrace{\begin{pmatrix} e^{-2t}, & 3e^{-3t} \\ e^{-2t}, & 4e^{-3t} \end{pmatrix}}_{V(t)} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, \; c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$V(t)$ – fundamentální matice (pro náš příklad)

<u>Řešení počáteční úlohy:</u> $x(0)=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$?

„obecné": $$x_{poč}(t)=\begin{pmatrix}e^{-2t}, & 3e^{-3t}\\ e^{-2t}, & 4e^{-3t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 4\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}p_1\\p_2\end{pmatrix},\quad x(0)=\begin{pmatrix}p_1\\p_2\end{pmatrix},\ t\in R$$

tedy $$x_{poč}(t)=\begin{pmatrix}e^{-2t}, & 3e^{-3t}\\ e^{-2t}, & 4e^{-3t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & -3\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_1\\p_2\end{pmatrix}=$$

$$=\underbrace{\begin{pmatrix}4e^{-2t}-3e^{-3t}, & -3e^{-2t}+3e^{-3t}\\ 4e^{-2t}-4e^{-3t}, & -3e^{-2t}+4e^{-3t}\end{pmatrix}}_{U(t,0)}\begin{pmatrix}p_1\\p_2\end{pmatrix},\ t\in R$$

$U(t,0)$ - standardní matice pro „náš" příklad

Pro $p=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ je řešení $$x_{poč}(t)=\begin{pmatrix}-10e^{-2t}+9e^{-3t}\\ -10e^{-2t}+12e^{-3t}\end{pmatrix},\ t\in R$$

(tj. $x(0)=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$)

<u>Další příklady budou ukázány v příloze - „příklady k přednášce" 16.3.</u>

<u>Poznámka:</u> Souvislost OLDR 2. řádu s konstantními koeficienty a soustavou dvou rovnic lineárních 1. řádu (s konstantními koeficienty) (zde homogenní)

<u>Minule</u> - soustavu, kterou jsme „neuměli" (ještě) řešit, jsme převedli na OLDR 2. řádu s konstantními koeficienty - a pak jsme řešení soustavy získali a ještě jsme získali „inspiraci" k obecnému řešení soustav - ukažme teď „obecně":

Řešíme soustavu ($n=2$) (s konstantními koeficienty)

(1) $\quad x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2$

(2) $\quad x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2$

Nechť $a_{12} \neq 0$ (kdyby $a_{12}=0$, pak pro $x_1(t)$ řešíme rovnici 1. řádu, a pak dosazením do druhé rovnice i rovnice „jen" pro x_2)

pak $x_2(t) = \frac{1}{a_{12}}\left(x_1'(t) - a_{11}x_1(t)\right)$ a dosadíme-li do (2):

$$\frac{1}{a_{12}}\left(x_1''(t) - a_{11}x_1'(t)\right) = a_{21}x_1(t) + \frac{a_{22}}{a_{12}}\left(x_1'(t) - a_{11}x_1(t)\right);$$

pak $\quad x_1''(t) - a_{11}x_1'(t) = a_{12}a_{21}x_1(t) + a_{22}\left(x_1'(t) - a_{11}x_1(t)\right)$

a tedy $\quad x_1''(t) - (a_{11}+a_{22})x_1'(t) + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1(t) = 0 \quad (*)$

a charakteristická rovnice pro OLDR 2. řádu (*):

$$\lambda^2 - (a_{11}+a_{12})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0 \quad !$$

$=$

a charakteristická rovnice pro matici dané soustavy je

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ tj. } (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda) - a_{12}a_{21} = 0, \text{ tj.:}$$

$$\lambda^2 - (a_{11}+a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0 \quad !$$

A obráceně: ukážeme si, že rovnici 2. řádu (lineární s konst. koeficienty „u nás") lze převést na řešení soustavy dvou rovnic lineárních 1. řádu (a odtud též je návod pro řešení OLDR řádu vyššího než 2)

Mějme rovnici $\quad y'' + py' + qy = 0$

Položme: $\quad x_1 = y$, $\; x_2 = y'$ $\quad$ pak: $\quad x_1' = x_2$, $\; x_2' = -px_2 - qx_1$

Matice soustavy je $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q & -p \end{pmatrix}$, charakteristická rovnice matice A

je $\begin{vmatrix} -\lambda, & 1 \\ -q, & -p-\lambda \end{vmatrix} = 0$, tj. $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$!

a pro $\lambda_1 \neq \lambda_2$ (což „umíme" u soustav řešit) máme:

$$v^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}, \quad a \quad v^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$$

(složky vektorů jsou řešením rovnice $-\lambda_1 v_{11} + v_{21} = 0$, resp. $-\lambda_2 v_{12} + v_{22} = 0$), tedy fundamentální matice

je $V(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t}, & e^{\lambda_2 t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t}, & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$ a

$$x_H(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t}, & e^{\lambda_2 t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t}, & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad (t \in R), \text{ a tedy}$$

$$y(t) \left(= x_1(t)\right) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}, \quad t \in R \qquad \text{(cbd)}$$

Poznámka:

Případy, kdy vlastní čísla matice A jsou i vícenásobná (tj. vícenásobnými kořeny charakteristické rovnice) nebo komplexní, jsme neřešili ani v lineární algebře, tedy nemáme ani nástroje pro řešení soustav OLDR 1. řádu – ale protože „umíme" soustavu OLDR 1. řádu převést na OLDR 2. řádu, tak pro $n=2$ to „asi" zvládneme řešit – ukážu příklady dvojnásobného vlastního čísla a vlastních čísel komplexních ve slíbené půlce s příklady k dnešní „přednášce".

Teď ještě ukážeme variaci konstant $\Big($obecně – (příklady opět v půlce)$\Big)$

Máme řešit soustavu $\quad (a_{ij}(t) \in C(a,b),\ f(t) \in C(a,b))$

$$(*) \qquad \underline{x'(t) = A(t).x(t) + f(t)}$$

nechť $\quad x_H(t) = V(t)c \quad (V(t)$ – fundamentální matice$)$

Variace konstant pro nalezení řešení nehomogenní soustavy (*):
(obecně asi (?))

$$\underline{x(t) = V(t).c(t)} \quad , \text{ a hledáme } c(t) \text{ tak, aby}$$

$$\big(V(t)\,c(t)\big)' = A(t)\,V(t)c(t) + f(t)$$

„kdyby" $\Big(\big(V(t)c(t)\big)' = V'(t)c(t) + V(t).c'(t)$ – platí, ukáže se to$\Big)$

pak máme: $\quad V'(t)c(t) + V(t)\,c'(t) = A(t)\,V(t)\,c(t) + f(t)\,,$

$t \in (a,b)$.

Ale protože $V(t)$ je fundamentální matice, platí $V'(t)=A(t)V(t)$
(ukažte si to – „problémek" z přednášky – asi pomůže, že sloupce matice $V(t)$ jsou řešení soustavy homogenní, tj. $\left(v^{(i)}(t)\right)' = A(t)\cdot v^{(i)}(t)$, $i=1,2,..n$)

<u>Pak dostáváme:</u>

$$A(t)V(t).c(t) + V(t).c'(t) = A(t)V(t)c(t)+f(t)$$

tj.
$$V(t).c'(t) = f(t)$$

a ex. $V^{-1}(t)$ $\Rightarrow$ $$c'(t) = V^{-1}(t)f(t)\,, \quad t\in(a,b)$$
($V(t)$ je regulární matice)

a tedy $$\underline{c(t)=\int V^{-1}(t)f(t)dt}\,, \quad t\in(a,b)$$

<u>Ale co asi je integrál vektorové funkce</u>? „Asi"

$$\begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \\ \vdots \\ c_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int \omega_1(t)dt \\ \int \omega_2(t)dt \\ \cdots \\ \int \omega_2(t)dt \end{pmatrix}, \text{ pokud } \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \\ \vdots \\ c_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1(t) \\ \omega_2(t) \\ \cdots \\ \omega_n(t) \end{pmatrix}$$
$t\in(a,b)$

Tedy („asi" – budeme podrobněji zkoumat při vyšetřování „vektorových funkcí jedné proměnné – další „přednáška")

Říká se „lidově": „derivace vektoru je vektor derivací"
a „integrál vektoru je vektor integrálů"